Liban 2009 Terminale ES

Exercice 1 — 4 points

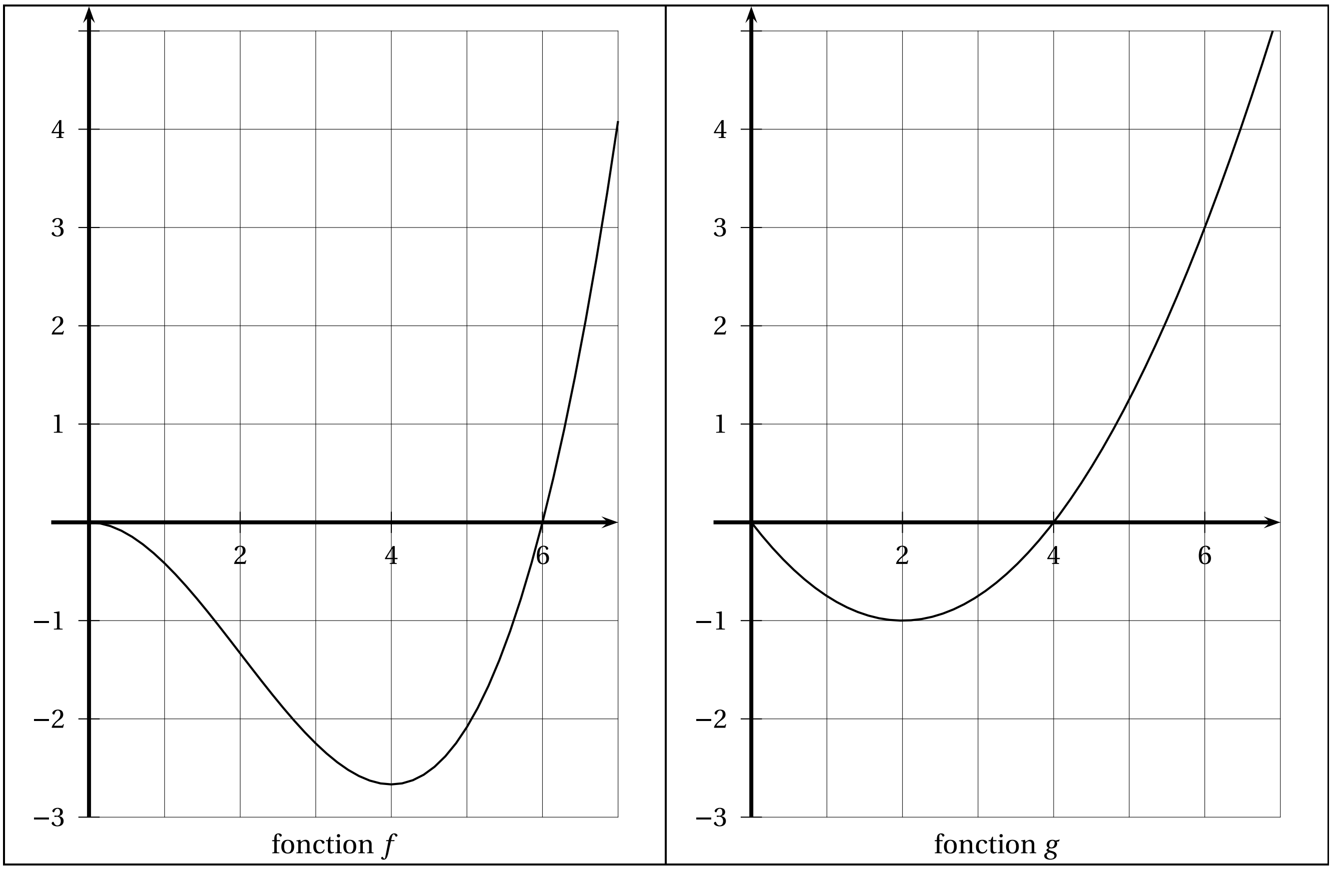
Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B ou C est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève $0,5$ point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif la note est ramenée à 0.

1. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $\ln(x+4)+\ln(x-2)=\ln(2x+1)$

A : n'a pas de solution.
B : admet exactement une solution.
C : admet exactement deux solutions.

2. On connait la représentation graphique de deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0~;~7]$



A : Les fonctions f et g ont le même sens de variation sur l'intervalle $[0~;7]$.
B : La fonction f est la dérivée de la fonction g.
C : La fonction f est une primitive de la fonction g.

3. On sait que f est une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$ et que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$.

A : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \ln\left[f(x)\right]=1$.
B : La limite de $\ln(f)$ en $-\infty$ n'existe pas.
C : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \ln\left[f(x)\right]=-\infty$.

4. L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ est égale à :

A : $\mathrm{e}-1$.
B : $1-\mathrm{e}$.
C : $1+\mathrm{e}$.

Exercice 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

Un magasin de vêtements démarqués a reçu un lot important de chemisiers en coton. Le propriétaire du magasin constate que les chemisiers peuvent présenter deux types de défauts : un défaut de coloris ou un bouton manquant. Il note aussi que :

- 4 % de ces chemisiers présentent un défaut de coloris,
- 3 % des chemisiers ont un bouton manquant,
- 2 % des chemisiers ont à la fois un défaut de coloris et un bouton manquant.

Une cliente prend au hasard un chemisier dans le lot. On considère les évènements suivants :

B : « le chemisier a un bouton manquant »,
C : « le chemisier présente un défaut de coloris ».

1. Calculer la probabilité des évènements suivants :

D : « cette cliente prend un chemisier ayant au moins un défaut »,
E : « cette cliente prend un chemisier ayant un seul défaut »,
F : « cette cliente prend un chemisier sans défaut ».

2. On sait que le chemisier qui intéresse la cliente présente un défaut de coloris. Quelle est la probabilité qu'il manque un bouton à ce chemisier ?

3. Une autre cliente prend au hasard deux chemisiers dans le lot. Ces choix peuvent être assimilés à un tirage au hasard avec remise dans le lot de chemisiers.

Quelle est la probabilité que sur les deux chemisiers choisis, un seul ait un bouton manquant ?

4. Le propriétaire du magasin vend un chemisier sans défaut 40 euros, il fait une remise de 20 % si le chemisier a un seul défaut, et de 50 % s'il a les deux défauts.

a. Établir la loi de probabilité du prix de vente en euros, noté X, d'un chemisier.

b. Quel chiffre d'affaires le propriétaire peut-il espérer faire sur la vente de cent chemisiers ?

Exercice 3 — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 10 + (x-3)\mathrm{e}^{x}$$

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Démontrer que $f'(x) = (x-2)\mathrm{e}^{x}$ et étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

c. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

d. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

2. a. Démontrer que la fonction $G : x \longmapsto (x-4)\mathrm{e}^{x}$ est une primitive sur $[0\ ;\ +\infty[$ de la fonction $g : x \longmapsto (x-3)\mathrm{e}^{x}$.

b. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

c. Étudier le sens de variation de F sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

Une entreprise fabrique x tonnes d'un certain produit, avec $x \in [0\ ;\ 4]$. Le coût marginal de fabrication pour une production de x tonnes est donné par $f(x)$ exprimé en **milliers d'euros**, où f est la fonction définie dans la partie A.

1. Les coûts fixes de l'entreprise s'élèvent à 20 000 euros. On assimile le coût total C à une primitive du coût marginal.

En utilisant les résultats de la question A 2., déterminer le coût total de fabrication $C(x)$, exprimé en milliers d'euros.

2. L'entreprise désire adapter sa production pour atteindre un coût marginal de 11 292 euros.

a. En utilisant la partie A démontrer qu'il est possible d'atteindre un coût marginal de 11 292 euros. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.*

b. Déterminer la production correspondante, à 10 kg près.

c. Quel est alors le coût moyen de fabrication ?

On rappelle que le quotient $\dfrac{C(x)}{x}$ est appelé coût moyen de fabrication pour une production de x tonnes de produit.

Exercice 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la production d'énergie d'origine éolienne en France, exprimée en milliers de tonnes d'équivalent pétrole (Ktep) :

Année	2000	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x_i	0	2	3	4	5	6	7
Production y_i	7	23	34	51	83	188	348

Source : INSEE avril 2008

1. **a.** Calculer le pourcentage d'augmentation de la production entre 2000 et 2007.

   b. Justifier que le pourcentage d'augmentation annuel moyen de la production entre 2000 et 2007 est 74,72 %, valeur arrondie au centième.

   c. En utilisant ce pourcentage d'augmentation annuel moyen de 74,72 %, déterminer la valeur obtenue en partant de l'année 2000 pour la production d'énergie d'origine éolienne en 2005 ? On donnera la valeur arrondie à l'unité.

   Quel est le pourcentage d 'erreur par rapport à la valeur réelle ?

2. Dans cette question, on se propose de réaliser un ajustement de type exponentiel.

   On pose $z = \ln y$.

   a. Recopier et compléter le tableau suivant. Les résultats seront arrondis au centième.

x_i	0	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$							

   b. Déterminer l'équation réduite de la droite de régression de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés à l'aide de la calculatrice ; les résultats seront arrondis au centième.

   c. En déduire que : $y = 6,82 \times 1,72^x$, les résultats étant arrondis au centième.

   d. En utilisant cet ajustement, déterminer la valeur arrondie à l'unité obtenue pour 2005.

3. On a représenté le nuage de points $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ ainsi que l'ajustement précédent dans un repère semi-logarithmique donné en annexe.

   a. À l'aide du graphique, estimer la production pour l'année 2009. Placer le point correspondant sur le graphique.

   b. À l'aide du graphique, déterminer à partir de quelle année la production de 2007 sera multipliée par dix. On mettra en évidence sur le graphique toute trace utile pour la réponse.

Exercice 4 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une entreprise de services à la personne propose dans ses services l'entretien de jardins. Pour ce service, cette entreprise a recours à des employés à temps partiel pour une durée globale de x heures, et elle loue le matériel nécessaire pour une durée globale de y heures. La surface de jardin traitée en une semaine, exprimée en centaines de m^2, est donnée par la fonction

$$f(x\ ;\ y) = \sqrt{2xy} \quad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont exprimées en heures.}$$

Une heure de travail coûte 15 euros et une heure de location du matériel coûte 30 euros. Les contraintes matérielles imposent que $0 \leqslant x \leqslant 120$ et $0 \leqslant y \leqslant 100$.

La figure 1 donnée en annexe représente la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z = f(x\,;\,y)$.
La figure 2 donnée en annexe représente la projection orthogonale de la surface $\mathcal{S}$ sur le plan $(x\text{O}y)$, les courbes de niveau de cette surface étant représentées pour z variant de 10 en 10.

1. **a.** Les points A$(20\,;\,40\,;\,z_{\text{A}})$ et B$\left(60\,;\,y_{\text{B}}\,;\,60\right)$ sont des points de la surface $\mathcal{S}$.
Déterminer pour chacun la coordonnée manquante.

b. Lire sur la figure 1 les coordonnées du point C et en donner une interprétation concrète.

c. Placer sur la figure 1 le point D de coordonnées $(10\,;\,80\,;\,40)$.

d. Donner la nature de la courbe de niveau $z = 50$.

2. Les contraintes financières imposent de fixer le coût hebdomadaire correspondant à 2 400 euros.

a. Démontrer que x et y sont liés par la relation $y = -\dfrac{1}{2}x + 80$.

b. Quelle est la nature de l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ de l'espace dont les coordonnées vérifient $y = -\dfrac{1}{2}x + 80$?

c. Représenter l'ensemble $(\mathcal{E})$ sur la figure 2 de l'annexe.

d. En déduire graphiquement la surface de jardin maximum qu'on peut traiter avec un coût hebdomadaire de 2 400 euros.

3. **a.** Vérifier que, sous la contrainte $y = -\dfrac{1}{2}x + 80$, z peut s'écrire sous la forme $z = g(x)$, g étant la fonction définie sur $[0\,;\,120]$ par $g(x) = \sqrt{160x - x^2}$.

b. Démontrer que sur $]0\,;\,120]$, $g'(x) = \dfrac{80 - x}{\sqrt{160x - x^2}}$, g' désignant la fonction dérivée de g, puis démontrer que la fonction g admet un maximum sur l'intervalle $[0\,;\,120]$.

c. En déduire le temps de travail et la durée de location hebdomadaire qui permettent de traiter une surface maximum.

ANNEXE

Enseignement de spécialité : exercice 4

Figure 1 :

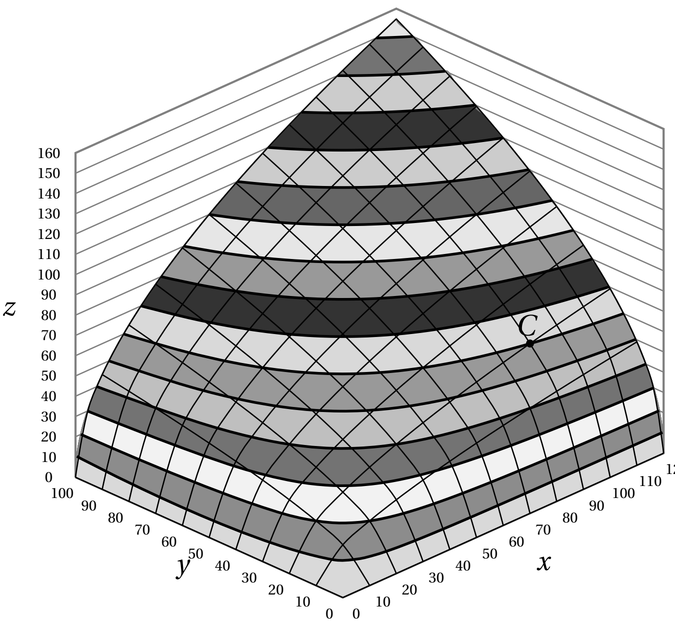
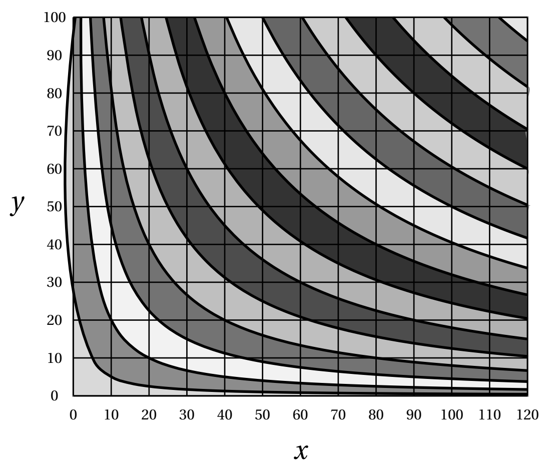


Figure 2 :



Annexe

À remettre avec la copie

Enseignement obligatoire : exercice 4